Aula 43

Sistemas Lineares Não Homogéneos

Fórmula da Variação das Constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$$

Teorema (Fórmula da Variação das Constantes): Sejam $A(t), \mathbf{b}(t)$ respectivamente, uma matriz $n \times n$ e um vector $n \times 1$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, o sistema linear de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t),$$

tem solução geral dada pela **Fórmula da Variação das Constantes**

$$\mathbf{y}(t) = X(t)\mathbf{c} + X(t) \int X^{-1}(t)\mathbf{b}(t)dt,$$

em que $X(t)$ é uma qualquer matriz solução fundamental do correspondente sistema homogéneo, e $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ uma coluna de constantes arbitrárias.
No caso do problema de Cauchy, com condições iniciais $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, $t_0 \in I$, a solução é dada por

$$\mathbf{y}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 + X(t) \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds.$$

Teorema (Fórmula da Variação das Constantes para A constante):

Quando $A(t) = A$ é uma matriz constante, a exponencial e^{At} pode ser usada no lugar de $X(t)$ obtendo-se, respectivamente, a solução geral

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{c} + e^{At}\int e^{-At}\,\mathbf{b}(t)dt, \qquad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

e a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}\,\mathbf{b}(s)ds.$$

EDOs de Ordem Superior à Primeira

Proposição: A equação diferencial ordinária de ordem n

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right)$$

tem solução escalar $y \in C^n(I)$ se e só se o sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

tem solução vectorial $\mathbf{x} \in C^1(I)$, através da correspondência

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Teorema: Seja $f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função contínua nas variáveis $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e localmente lipschitziana nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Então, o problema de valor inicial para a equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right) \\ y(t_0) = y_0, \\ \frac{dy}{dt}(t_0) = y_0', \\ \frac{d^2 y}{dt^2}(t_0) = y_0'', \\ \cdots, \\ \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

tem solução única, numa vizinhança de t_0, a qual é prolongável a um intervalo máximo de definição.

EDOs Lineares de Ordem Superior à Primeira

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2(t)\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = b(t)$$

Sistema Equivalente

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 - \cdots - a_{n-1}(t)x_n + b(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}}_{\text{Matriz Companheira}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Proposição: Sejam $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)$ e $b(t)$ funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, o conjunto das soluções da equação diferencial ordinária linear homogénea de ordem n

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2(t)\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = 0$$

constitui um espaço vectorial de dimensão n.
O teorema de Picard-Lindelöf garante a existência de um isomorfismo linear entre o espaço vectorial dos dados iniciais $\left(y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in \mathbb{R}^n$ para algum $t_0 \in I$ e o espaço vectorial das soluções.
O conjunto das soluções da equação não homogénea

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2(t)\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = b(t)$$

constitui um espaço afim, obtido pela soma de uma solução particular não homogénea a todas as soluções do espaço vectorial das soluções homogéneas.